

Równania różniczkowe
Lista 0

Zasady Dynamiki Newtona

Zasada I

Jeżeli na ciało nie działa żadna siła lub działające siły równoważą się, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, czyli innymi słowy

$$a = 0$$

gdzie a jest wartością przyspieszenia ciała.

Zasada II

Gdy siły działające na ciało nie równoważą się, to ciało porusza się ruchem zmiennym. Kierunek i zwrot przyspieszenia \vec{a} są zgodne z kierunkiem siły wypadkowej \vec{F} , a wartość a jest wprost proporcjonalna do wartości siły F i odwrotnie proporcjonalna do masy m ciała:

$$a = \frac{F}{m}$$

Zasada III

Jeśli ciało A działa na ciało B siłą \vec{F} , to ciało B działa na ciało A siłą $-\vec{F}$ (tj. siłą o takiej samej wartości i kierunku, lecz o przeciwnym zwrocie).

Zad 1. Niech $x = x(t)$ oznacza położenie punktu materialnego M na prostej Ox w czasie t . Korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona wyznaczyć różniczkowe równanie ruchu dla punktu M o masie m , który porusza się pod działaniem siły, której miarą na osi O_x jest wartość $F = F(t)$.

Zad 2. Znaleźć równanie różniczkowe opisujące zależność między czasem t a prędkością v swobodnie spadającego ciała o masie m , przyjmując że opór powietrza jest wprost proporcjonalny do kwadratu prędkości.

Zad 3. W myśl prawa odkrytego przez Newtona prędkość stygnięcia ciała jest wprost proporcjonalna do różnicy między temperaturą ciała T a temperaturą otoczenia T_0 . Znaleźć równanie różniczkowe opisujące zależność T od czasu t .

Zad 4. Rozpatrzmy reakcję chemiczną zachodzącą między substancjami A i B , których ilości początkowe oznaczymy przez a i b . Zakładając, że w skutek reakcji chemicznej po czasie t spalana jest taka sama ilość x substancji A i B oraz przyjmując, że prędkość reakcji chemicznej jest wprost proporcjonalna do iloczynu obu wchodzących w reakcję substancji wyznaczyć równanie różniczkowe na x .

Zad 5. Wyznaczyć równanie różniczkowe opisujące rodzinę krzywych, w których tangens kąta między styczną a dodatnim kierunkiem osi Ox jest odwrotnie proporcjonalny do rzędnej punktu styczności.

Zad 6. Wyznaczyć równanie różniczkowe opisujące rodzinę krzywych, których suma długości odcinków stycznej i podstycznej jest proporcjonalna do iloczynu współrzędnych punktu styczności.

Objaśnienie: Jeśli l oznacza prostą styczną do danej krzywej w punkcie (x, y) , to przez *odcinek stycznej* rozumiemy odcinek łączący punkt (x, y) z punktem przecięcia prostej l z osią Ox . *Podstyczną*, lub też *odcinkiem podstycznej* nazywamy odcinek łączący punkt $(x, 0)$ z punktem przecięcia się l z osią Ox .